Eric Reyssat

Quelques Aspects des Surfaces de Riemann

With 55 Illustrations

1989

Birkhäuser
Boston · Basel · Berlin

Eric Reyssat
Departement de Mathematiques
Informatique et Mecanique
Universite de Caen
14032 Caen Cedex
France

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
Reyssat, Eric.
Quelques aspects des surfaces de Riemann / Eric Reyssat.
p. cm. — (Progress in mathematics ; v. 77)
Includes bibliographical references.
ISBN 0-8176-3441-X (alk. paper)
1. Riemann surfaces. I. Title. II. Series: Progress in mathematics (Boston, Mass.)
QA333.R48 1989
515'.223–dc20 89-17806

Printed on acid-free paper.

ISBN 0-8176-3441-X
ISBN 3-7643-3441-X

Camera-ready text provided by the author.
Printed and bound by Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, Michigan.
Printed in the U.S.A.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Table des matières

Introduction

Ce livre reprend, à part le chapitre 13 ajouté ultérieurement, le polycopié d'un cours à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) en 83-84, y compris le sujet d'examen donné en fin de volume.
On y développe les fondements de la théorie des surfaces de Riemann, en mettant l'accent sur les liens qui existent entre divers points de vue, spécialement dans le cas compact. Il s'agit de voir comment une surface de Riemann peut être à la fois une surface topologique (avec des ouverts, un groupe fondamental,...), un corps de degré de transcendnce 1 sur **C** (avec des valuations,...), une courbe algébrique (avec un degré, des points singuliers,...), une variété analytique (avec des fonctions méromorphes, mais pas de point singulier), un quotient de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, de **C** ou d'un disque (avec un domaine fondamental, une aire,..), etc... Seul le point de vue métrique n'a pas été développé faute de temps mais aurait mérité une place. Cette diversité apparaît dans les 18 définitions du genre données à la fin du chapitre I. Ce chapitre rassemble, sans preuve, des faits saillants de la théorie. Beaucoup sont démontrés par la suite. Le chapitre XI est consacré entièrement à des exemples (courbes elliptiques, hyperelliptiques, modulaires).
Les références données en fin de livre permettront à chacun d'approfondir dans les directions qu'il souhaite.

Eric Reyssat

Chapitre I

Présentation globale

Ce chapitre rassemble quelques résultats frappants de la théorie des surfaces de Riemann, groupés par thèmes plus que par ordre logique de démonstration. Il ne s'agit pas d'un plan du livre bien qu'une grande partie des énoncés qui suivent soient prouvés dans les chapitres ultérieurs.

§1 Propriétés générales

Les définitions de surfaces de Riemann étant nombreuses, et pas toutes équivalentes, on fixe celle qui sera adoptée dans la suite :

Définition - *Une* **surface de Riemann** *est une variété analytique complexe de dimension 1. (Une variété sera supposée connexe). On notera généralement X une surface de Riemann.*

Autrement dit, X est un espace topologique séparé connexe muni d'une **structure analytique** définie ainsi : il y a un recouvrement ouvert $X = \bigcup U_\alpha$ de X et des homéomorphismes $f_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha =$ ouvert de $\mathbf{C}$ tels que les **fonctions de transition** $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ soient analytiques (là où elles sont définies). Les **cartes** (U_α, f_α) forment un **atlas**, et deux atlas (U_α, f_α) et (W_β, g_β) sont **équivalents** si la réunion en est un (c'est-à-dire si les $f_\alpha \circ g_\beta^{-1}$ sont analytiques). La **structure analytique** est une classe d'équivalence d'atlas.
Les fonctions de transition $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ étant holomorphes, la définition suivante a bien un sens :

Définition - *Une fonction $f : X \to \mathbf{C}$ est dite* **holomorphe** *(resp. $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^\infty$,* **méromorphe***) si les composés $f \circ f_\alpha^{-1}$ le sont. On note $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X.*

Exercices - $\boxed{1}$ *Si $f : X \to \mathbf{C}$ est méromorphe, définir à l'aide des f_α* **l'ordre de** *f en un point P de X.*

$\boxed{2}$ *Si X_1 et X_2 sont deux surfaces de Riemann et $f : X_1 \to X_2$ une application, définir "f est holomorphe" (grâce aux cartes). On dira encore que f est un* **morphisme** *(les surfaces de Riemann forment alors une catégorie). Une fonction méromorphe $X \to \mathbf{C}$ n'est autre qu'un morphisme $X \to \mathbf{P}^1$ (définir la structure analytique sur $\mathbf{P}^1$).*

Remarque - La théorie des surfaces de Riemann nécessite aussi l'étude de variétés analytiques de dimension supérieure à 1 (définies par des cartes $f_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha =$ ouvert de $\mathbf{C}^n$). Ainsi, si X est une surface de Riemann compacte, elle peut se plonger (voir chap. IX) dans un espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ qui a une structure de variété. Le tore $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[i]$ est une surface de Riemann qu'on peut plonger dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ comme intersection de deux surfaces ($\dim_{\mathbf{C}} = 2$) quadriques. Les tangentes, plans tangents... à une surface de Riemann X plongée dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ forment aussi des variétes de dimension supérieure. A toute surface de Riemann compacte X on associe sa "jacobienne" $J(X)$, variété de dimension égale au "genre" de X (voir chap. XII). Certaines familles de surfaces de Riemann (les couronnes $\{z; r < |z| < 1\}$, les courbes elliptiques, les surfaces de Riemann compactes de genre donné, ...) sont paramétrées par des variétés, de dimension parfois > 1.

Historiquement, Riemann a introduit les surfaces de Riemann pour rendre uniformes des fonctions multiformes (fonctions algébriques, logarithme,...) en "dédoublant" la variable : il remplace le plan $\mathbf{C}$ de la variable par une surface qui "coïncide avec le plan" (on dit aujourd'hui localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{C}$) et "étendue au-dessus du plan" (i.e. munie d'une projection $X \to \mathbf{C}$) aussi loin que la fonction peut être prolongée analytiquement.

Voici quelques procédés permettant d'associer une surface de Riemann X_f à une fonction analytique f :

$\boxed{1}$ $X_f = \{$séries obtenues par **prolongement analytique** de $f\}$ (Voir chap. VI).

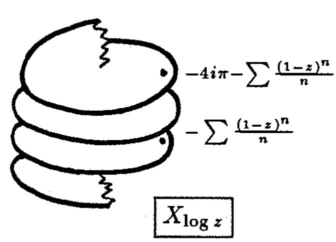
Exemple - On définit $f(z) = \log z$ au voisinage de 1 par la série

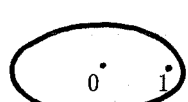
$$f(z) = -\sum \frac{(1-z)^n}{n} ;$$

par prolongement on obtient aussi toutes les séries

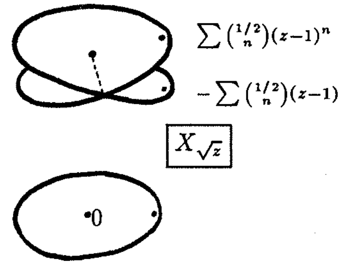
$$2ki\pi - \sum \frac{(1-z)^n}{n} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

d'où une infinité de "feuillets". On passe d'un feuillet au suivant en tournant autour de 0.





Pour que la théorie marche bien (cf. th.1.1 ci-dessous), on convient que la surface de Riemann contient un point au-dessus de 0 si et seulement si on retombe sur la même série après un nombre fini de tours.
Ainsi, $\sqrt{z} = \sum \binom{1/2}{n}(z-1)^n$ donne $\sqrt{z} = -\sum \binom{1/2}{n}(z-1)^n$ après un tour, et à nouveau $\sqrt{z} = \sum \binom{1/2}{n}(z-1)^n$ après deux tours.



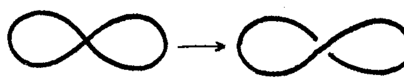
L'ensemble X_f est donc l'ensemble des **séries de Puiseux** $\sum a_n z^{n/k}$ obtenues à partir de f.
Avec cette construction, on montre alors (voir chap. VII) :

Théorème 1.1 - *X_f est compacte $\iff$ f est algébrique (i.e. $P(z, f(z)) \equiv 0$ pour un polynôme $P \neq 0$). Cela équivaut encore au fait que le corps $\mathcal{M}(X_f)$ est de type fini sur* $\mathbf{C}$ *, de degré de transcendance 1.*

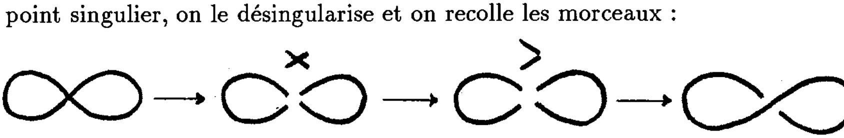
Ce résultat souligne l'importance du cas algébrique. Dans les trois constructions suivantes, on **suppose** f algébrique.

$\boxed{2}$ **Normalisation** de la courbe algébrique $P(z, f) = 0$.

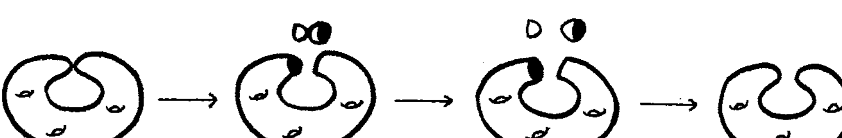
On part d'une courbe plane ayant des points singuliers, et on tâche de la rendre lisse (localement homéomorphe à $\mathbf{C}$).
Cela peut être fait par un éclatement (procédé algébrique global) : on détache les branches qui se croisent pour les séparer, et on obtient une courbe lisse dans l'espace.



On peut aussi procéder localement (analytiquement) : on enlève un voisinage du point singulier, on le désingularise et on recolle les morceaux :



Du point de vue topologique (dimension réelle = 2), on a le dessin suivant :

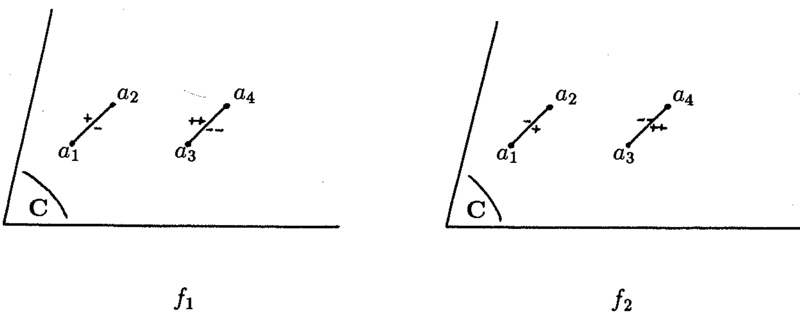


Du point de vue série de Puiseux, si localement $f = \sum a_n z^{n/k}$, on paramètre les "branches" de la courbe par k petits disques : $t \longmapsto (t^k, \sum a_n(\zeta^j t)^n)$ pour $j = 1, \ldots, k$ où $\zeta = e^{2i\pi/k}$.

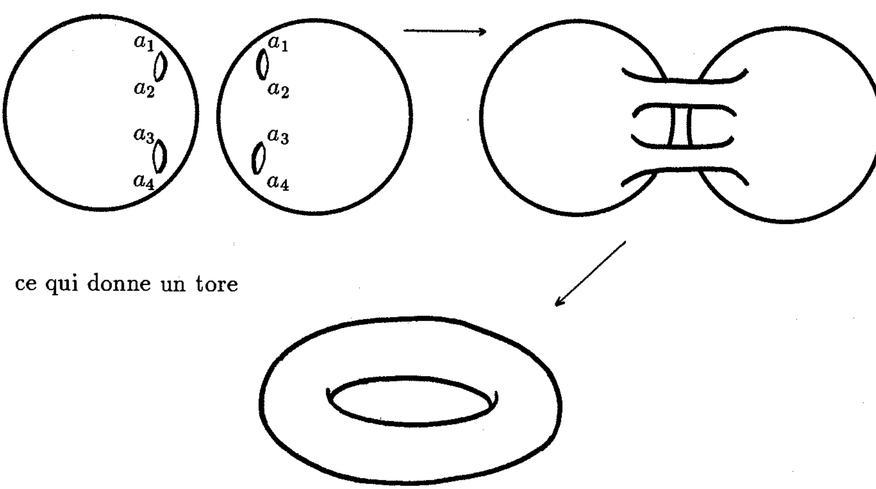
$\boxed{3}$ **Procédé purement algébrique :**
On choisit pour X_f l'ensemble des valuations du corps $K = \mathbf{C}(z, f(z))$; on peut alors y mettre une structure topologique puis analytique (cf. [L]).

$\boxed{4}$ **Procédé de recollement** de plans (ou sphères) fendus, par monodromie (voir [Si] Chap.I , [F-K] p.97 ,[G-H] p.256) :

Exemple - $f(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}$ définit deux fonctions uniformes f_1 et $f_2 = -f_1$ sur des copies de $\mathbf{C}$, "fendu" ainsi :



Quand on tourne autour d'un a_i, f_1 et f_2 s'échangent : on passe d'un feuillet à l'autre. Ainsi, f définit **une** fonction F **uniforme** sur la réunion recollée des plans. On prend en fait aussi le point à l'infini, d'où recollement de deux sphères :



ce qui donne un tore

Remarque - La surface de Riemann X_f est munie naturellement de deux fonctions $X_f \to \mathbf{P}^1$: la projection z et la fonction f elle-même (vue comme fonction uniforme sur X_f). Il s'agit d'un phénomène général (chap. III et chap. VI) :

Théorème 1.2 - *Toute surface de Riemann possède des fonctions méromorphes non constantes, et est isomorphe à une X_f.*

Ce théorème d'existence est fondamental. Il peut être utilisé pour montrer la caractérisation topologique suivante des surfaces de Riemann :

Théorème 1.3 - *Toute surface de Riemann est triangulable et orientable. Réciproquement, toute surface (réelle) triangulable et orientable peut être munie d'une structure de surface de Riemann. (La 2ème assertion est élémentaire, cf. chap.II).*

On en déduit que toute surface de Riemann a une base dénombrable d'ouverts (ce qui devient faux en dimension supérieure, voir [Na]). En particulier, il existe des partitions $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité sur X.

Une grande part de la théorie des surfaces de Riemann concerne l'étude des fonctions méromorphes (raffinements et applications du th.1.2). Le cas compact, dont le th.1.1 souligne la particularité, sera traité plus loin. Le cas non compact est caractérisé par l'existence de nombreuses fonctions (chap. XIII) :

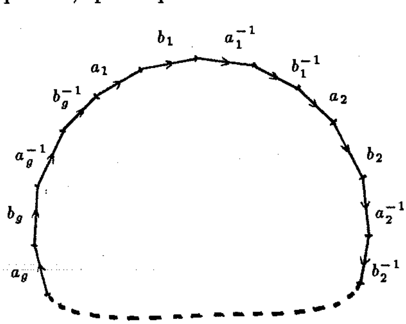
Théorème 1.4 - $\boxed{1}$ *Toute surface de Riemann non compacte X (on dit encore* **ouverte***) est une* **variété de Stein** *: les fonctions holomorphes séparent les points, et pour toute suite discrète infinie (x_i) de points de X, il existe une fonction holomorphe sur X non bornée sur (x_i).*
Comme toute variété de Stein, elle vérifie les propriétés de Mittag-Leffler et de Weierstrass :
$\boxed{2}$ *Soit (U_i, f_i) une distribution de Mittag-Leffler (f_i méromorphe sur l'ouvert U_i, $f_i - f_j$ holomorphe sur $U_i \cap U_j$). Il existe une fonctions méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que pour tout i, $f - f_i$ soit holomorphe sur U_i.*
$\boxed{3}$ *Pour toute famille $(n_x)_{x \in X}$ d'entiers nuls sauf pour une partie discrète de points de X, il existe une fonction $f \in \mathcal{M}(X)$ telle que pour tout $x \in X$, $\operatorname{ord}_x f = n_x$.*

Autrement dit, on peut imposer à f ses parties principales, ou bien l'ordre de tous ses zéros et pôles.
Cette propriété de Stein permet par exemple de voir X comme courbe analytique dans $\mathbf{C}^3$ avec points ordinaires comme seules singularités (cf. [Ra] p.250).

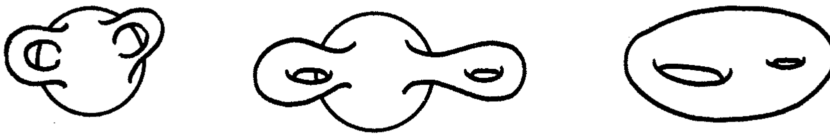
§2 Le cas compact

D'après le théorème 1.3, la topologie des surfaces de Riemann compactes est celle des surfaces triangulables orientables compactes, qu'on peut facilement classifier (voir chap. II) :

Corollaire du th.1.3 - $\boxed{1}$ *Une surface de Riemann compacte X est homéomorphe soit à la sphère S^2 soit à un polygone à $4g$ côtés identifiés 2 à 2 comme suit : le côté c est identifié avec c^{-1} pris en sens inverse.*
Le nombre g est un invariant topologique appelé **genre** *de X ($g = 0 \iff X \approx S^2$).*



$\boxed{2}$ *Si X est de genre g, elle est homéomorphe à une sphère à g anses, qui est aussi un tore à g trous (dessin pour $g = 2$) :*



$\boxed{3}$ *Son groupe fondamental $\pi_1(X)$ est le groupe engendré par $2g$ générateurs $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ et l'unique relation $\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1$ (où $[a, b] = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$). Le premier groupe d'homologie $H_1(X)$ est le groupe abélien libre engendré par $a_1, \ldots, b_g$.*

La structure topologique d'une surface de Riemann compacte ne suffit pas pour retrouver la structure analytique (sauf si $g = 0$). Mais d'autres descriptions des surfaces de Riemann conservent toute l'information (au sens équivalence de catégories). Voici quelques unes de ces descriptions (voir chap. VII) :

Théorème 1.5 - *Il y a équivalence de catégories entre :*
1. *Surfaces de Riemann compactes + morphismes non constants.*
2. *Corps de fonctions d'une variable (extension de type fini et degré de transcendance 1 sur $\mathbf{C}$) + morphismes non nuls de $\mathbf{C}$-algèbres.*
3. *Courbes algébriques sur $\mathbf{C}$+ morphismes rationnels non constants.*
4. *Courbes algébriques* **planes** *sur $\mathbf{C}$+ morphismes rationnels non constants.*
5. *Courbes projectives lisses/$\mathbf{C}$+ morphismes non constants (les morphismes rationnels sont automatiquement réguliers).*

Explicitons un peu les divers foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{S.R. compactes}} \arrow[dr, shift right, "a"'] & & \boxed{\text{courbes planes}} \arrow[ll, "h"'] \arrow[dd, phantom, "\cap"] \\
& \boxed{\text{Corps de fonctions}} \arrow[ul, shift right, "b"'] \arrow[ur, "f"] \arrow[dl, "c"] & \\
\boxed{\text{courbes proj. lisses}} \arrow[uu, "e"'] & & \boxed{\text{courbes alg.}} \arrow[ll, "\supset"', "d"] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

a) : $X \longmapsto \mathcal{M}(X)$ corps des fonctions méromorphes.
b) et c) : $K \longmapsto \mathcal{V}(K) = \{\text{valuations de } K\}$ avec structure analytique ou algébrique (un point de X correspond à la valuation ord_x sur $\mathcal{M}(X)$).
d) : normalisation et complétion d'une courbe algébrique.
e) : structure analytique d'une variété algébrique (zéros de polynômes donc de fonctions analytiques) + critère jacobien.
f) : on écrit $K = \mathbf{C}(x, y)$ (th. de l'élément primitif), où x et y sont liés algébriquement. Le polynôme $P = Irr(x, y)$ définit une courbe plane.

g) : $C \longmapsto k(C)$ corps des fonctions rationnelles.
h) : normalisation analytique locale (cf. §1).

On obtient encore des catégories équivalentes en se restreignant aux courbes projectives lisses de $\mathbf{P}^3$, ou aux courbes planes ayant des points doubles ordinaires comme seules singularités ... (voir chap. IX).

Le point central de la théorie des surfaces de Riemann compactes est le **théorème de Riemann-Roch** qui précise le théorème d'existence (th.1.2) en comptant les fonctions méromorphes ayant des singularités "bornées" ; donnons juste un **exemple** : si $n \geq 2g$ et $p_1, \ldots, p_n$ sont des points de X, les fonctions méromorphes sur X ayant au plus des pôles simples aux p_i et holomorphes ailleurs forment un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $n + 1 - g$.
On en donnera deux preuves (chap. V et chap. IX) et beaucoup d'applications (problème de Mittag-Leffler pour les différentielles, plongement canonique de X dans $\mathbf{P}^{g-1}$, points de Weierstrass, courbes de genre 1,...).
On voit sur l'exemple précédent que le genre g a également une signification analytique. C'est en fait un invariant omniprésent dans la théorie des surfaces de Riemann compactes, que ce soit du point de vue topologique, analytique, algébrique, riemannien,...(voir quelques définitions de g données à la fin de ce chapitre). Le genre permet une première classification des surfaces de Riemann compactes ; c'est un problème général qu'on aborde maintenant.

§3 Classification

a) Le point de vue des revêtements

Rappelons l'existence du revêtement universel (cf. [Fo], ou [Go]) :

Rappel - *Toute surface de Riemann X a un revêtement universel simplement connexe $\tilde{X}$ (naturellement muni d'une structure de surface de Riemann) et X est quotient de $\tilde{X}$ par un groupe G d'automorphismes de $\tilde{X}$ agissant discrètement et sans point fixe.*

Il est donc naturel de chercher à classer d'abord les surfaces de Riemann simplement connexes (chap. IV). Il n'y en a que trois ! C'est encore une propriété typique de la dimension 1 (en dimension > 1, le polydisque n'est pas isomorphe à la boule unité. Voir [Ra] p.25).

Théorème 1.6 (d'uniformisation) - *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe soit à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, soit à $\mathbf{C}$, soit au disque unité D qui est aussi isomorphe au demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ par $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$.*

En étudiant les groupes d'automorphismes de ces trois surfaces, on obtient une classification plus fine :

Exemples - Si $\tilde{X} = \mathbf{P}^1$ alors $X = \mathbf{P}^1$.
Si $\tilde{X} = \mathbf{C}$ alors $X = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}/\omega\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^*$ ou un tore $\mathbf{C}/\Lambda$ (Λ réseau de $\mathbf{C}$).
Si $\tilde{X} = D$ alors X peut être par exemple D ou $D^* = D \setminus \{0\}$ ou une couronne $D_r = \{z; r < |z| < 1\}$.
Ces 7 surfaces de Riemann sont les seules à avoir un groupe fondamental abélien (tous leurs revêtements sont galoisiens), ou encore à avoir un groupe d'automorphismes non discontinu (les orbites sous $\mathrm{Aut}(X)$ ont des points d'accumulation).

Toutes les autres surfaces de Riemann ont D pour revêtement universel ; la structure des sous-groupes de $\mathrm{Aut}(D)$ est un sujet d'étude très vaste (théorie des formes automorphes,...).

Remarques - $\boxed{1}$ Le point de vue variété riemannienne des surfaces de Riemann (existence de métrique compatible avec la structure analytique) est lié à la classification précédente : la courbure est > 0, $= 0$ ou < 0 suivant que $\tilde{X} = \mathbf{P}^1$, $\mathbf{C}$ ou D.
$\boxed{2}$ La théorie de la classification (y compris la preuve du théorème d'uniformisation) est très liée à l'existence ou non de certaines fonctions harmoniques sur X. Dans le cas des surfaces ouvertes, cette théorie est très poussée et permet une classification fine (voir [A-S]).

b) Le cas compact - Le genre

On suppose dans ce paragraphe X compacte, de genre g. Il est clair (topologiquement) que $\mathbf{P}^1$ est de genre 0, et les tores $\mathbf{C}/\Lambda$ de genre 1. Toutes les autres surfaces de Riemann compactes ont un genre ≥ 2. La série d'exemples plus haut montre donc le lien suivant entre le genre et le revêtement universel :

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= \mathbf{P}^1 \iff g = 0 \quad (\text{et } X = \mathbf{P}^1).\\
\tilde{X} &= \mathbf{C} \iff g = 1 \quad (\text{et } X = \mathbf{C}/\Lambda).\\
\tilde{X} &= D \iff g \geq 2.
\end{aligned}$$

Les surfaces de Riemann de petit genre sont évidemment topologiquement les plus simples ; c'est aussi vrai du point de vue courbes algébriques. On peut les décrire assez explicitement (voir [M], [G-H]) :

$\boxed{g = 0}$ X est la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

$\boxed{g = 1}$ X est une cubique non singulière de $\mathbf{P}^2$, d'équation affine

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \quad (g_2, g_3 \in \mathbf{C}).$$

Elle admet aussi un plongement dans $\mathbf{P}^3$ comme intersection de deux quadriques. Ces courbes de genre 1, dites courbes elliptiques, ont des propriétés particulières très importantes : la structure de groupe du revêtement universel $\tilde{X} = \mathbf{C}$ induit une structure de groupe sur X (X est isomorphe à sa "jacobienne"), on connait explicitement les fonctions méromorphes sur X (théorie de Weierstrass),...

$\boxed{g=2}$ X est un revêtement ramifié de $\mathbf{P}^1$ à deux feuillets, avec 6 points de ramification ; elle a un modèle affine plan d'équation $y^2 = P(x)$ $(\deg P = 5$ ou $6)$. On peut aussi l'écrire comme quartique plane à un point double. Il faut généralement 3 équations pour la représenter comme courbe lisse de $\mathbf{P}^3$.

$\boxed{g=3}$ Il y a deux types de courbes :

- Les revêtements doubles de $\mathbf{P}^1$ (qu'on appelle **courbes hyperelliptiques**) à 8 points de ramification. Elles ont un modèle plan d'équation $y^2 = P(x)$ avec $\deg P = 7$ ou $8)$.
- Les quartiques planes non singulières dans $\mathbf{P}^2$.

$\boxed{g=4}$ Encore deux types :

- hyperelliptique : revêtement double de $\mathbf{P}^1$ à 10 ramifications.
- sextique lisse de $\mathbf{P}^3$, intersection complète d'une quadrique et d'une cubique. Il y a un modèle plan comme quintique à 2 points doubles ordinaires.

$\boxed{g=5}$

- hyperelliptique avec 12 ramifications, $y^2 = P(x)$ $(\deg P = 11$ ou $12)$.
- courbes lisses de degré 8 dans $\mathbf{P}^4$; ces dernières se divisent en deux familles :
  - courbes **trigonales** (revêtement triple de $\mathbf{P}^1$) : ce sont celles qui peuvent s'écrire comme quintique plane à 1 point double ordinaire.
  - intersections complètes de 3 hypersurfaces quadriques de $\mathbf{P}^4$. Ce sont encore celles qui sont sur une quadrique lisse ([ACGH] p.270).

$\boxed{g=6}$

- hyperelliptique avec 14 ramifications, $y^2 = P(x)$ $(\deg P = 13$ ou $14)$.
- lisse de degré 10 dans $\mathbf{P}^5$, ce qui se subdivise en
  - trigonales (revêtement triple de $\mathbf{P}^1$)
  - quintiques planes lisses
  - intersection de quadriques.

On peut enfin préciser ce qui se passe dans le cas général :

Théorème 1.7 - *Si X (de genre $g \geq 1$) est hyperelliptique, elle a une équation*

$$y^2 = \prod_{1}^{2g+2} (x - a_i).$$

Sinon, $g \geq 3$ et il y a un plongement canonique $X \hookrightarrow \mathbf{P}(V) \simeq \mathbf{P}^{g-1}$, dont l'image est une courbe lisse de degré $2g-2$. Si de plus $g \geq 7$, et X non trigonale, c'est une intersection de quadriques.

Toute surface de Riemann compacte X de genre g admet un plongement (non canonique) dans $\mathbf{P}^3$, ainsi qu'une immersion dans $\mathbf{P}^2$ comme courbe à points doubles ordinaires. Dans ces cas, on peut lier le degré et le genre par le résultat suivant :

Théorème 1.8 - *Si X est une courbe projective plane à r points doubles ordinaires (sans autre singularité), de degré d et genre g, alors*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - r.$$

Si X est une courbe projective lisse non plane de $\mathbf{P}^3$, de degré d et genre g, alors

$$g \leq \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{2}\right] - d + 1.$$

L'étude des cas $g = 1, \ldots, 6$ montre que pour voir une courbe de genre assez grand comme revêtement ramifié de $\mathbf{P}^1$, le "nombre de feuillets" doit être parfois grand. On peut cependant le borner en général ([G-H]) :

Théorème 1.9 - *Toute surface de Riemann compacte de genre g est revêtement ramifié de $\mathbf{P}^1$ avec au plus $[\frac{g+3}{2}]$ feuillets. Cette borne est la meilleure possible (pour tout g, "presque aucune" surface de Riemann de genre g n'est revêtement avec moins de feuillets).*

Problème : classer plus finement les surfaces de Riemann de genre donné, en les paramétrant (par exemple les surfaces de Riemann hyperelliptiques de genre g sont paramétrées par les coefficients a_i de l'équation $y^2 = \prod(x - a_i)$). La réponse à ce problème permet de donner un sens précis à des énoncés du type : "la surface de Riemann générale de genre g vérifie telle propriété" (n'est pas hyperelliptique, n'a pas d'automorphisme, a tous ses points de Weierstrass normaux,...). Cette réponse dépend du groupe des automorphismes (analytiques) des surfaces de Riemann étudiées ; on commence par étudier ces automorphismes :

Théorème 1.10 - *Soit X une surface de Riemann de genre g, et $\rho = \dim_{\mathbf{C}}(\operatorname{Aut} X)$ (dimension comme groupe de Lie complexe). Alors si $g = 0$, on a $\rho = 3$ (car $X = \mathbf{P}^1$ et $\operatorname{Aut} \mathbf{P}^1 = PSL_2(\mathbf{C})$) ; si $g = 1$, on a $\rho = 1$ ($\operatorname{Aut} X$ est extension de X par un groupe fini) ; si $g \geq 2$, on a $\rho = 0$: $\operatorname{Aut} X$ est fini de cardinal $\leq 84(g-1)$ (th. de Hurwitz).*

On peut alors préciser l'espace qui paramètre les surfaces de Riemann de genre g ; on l'appelle espace des modules. Plus précisément, on peut définir une notion d'espace de modules grossier dans une catégorie qui contient les surfaces de Riemann, et on peut montrer :

Théorème 1.11 - *Il existe un espace de modules grossier (des surfaces de Riemann compactes de genre g) comme espace analytique complexe, de dimension $3g-3+\rho$ (Riemann, Teichmüller,...), et aussi comme variété algébrique quasi-projective de dimension $3g - 3 + \rho$ (Mumford), où $\rho = \dim \operatorname{Aut} X = 3, 1,$ ou 0 suivant que $g = 0,\ g = 1$ ou $g \geq 2$.*

Cet espace M_g est assez bien connu : il existe (du point de vue algébrique) en toute caractéristique (en fait comme schéma/$\mathbf{Z}$), on connait sa complétion projective $\overline{M}_g$ (qui classifie les "courbes stables"), ses singularités (elles correspondent aux courbes ayant des automorphismes non triviaux, i.e. différents de l'identité et éventuellement de l'involution hyperelliptique). L'espace M_g est construit explicitement pour $g = 2$. M_g est unirationnel pour $g \leq 11$ et, au contraire, de type général pour $g \geq 24$ (mais très mal connu de ce point de vue lorsque $14 \leq g \leq 22$)(Réf. Cornalba, dans sém. Bourbaki 615 (1983) ; articles de Harris et Hartshorne dans Proc. symp. pure math 46 (1987)).

§4 Arithmétique des courbes

Le point de vue algébrique des surfaces de Riemann compactes peut être formalisé à tout autre corps que $\mathbf{C}$: on se donne une courbe projective non singulière X définie sur un corps k (c'est-à-dire par des polynômes à coefficients dans k). Il y a encore un genre g de X, un théorème de Riemann-Roch, ... On note $X(k)$ l'ensemble des points k-rationnels de X (i.e. à coordonnées dans k) : il s'agit donc d'étudier les solutions d'équations polynomiales dans un corps donné ; deux cas sont spécialement intéressants du point de vue arithmétique : les corps de nombres et les corps finis (voir [Maz]).

a) k = corps de nombres

$\boxed{1}$ Si $X = \mathbf{P}^1$, on connait bien $\mathbf{P}^1(k) \simeq$ droites de k^2 : il y a en particulier une infinité de points.

$\boxed{2}$ Si $X = E$ est une courbe elliptique ($g = 1$) : on suppose donné un point 0_E de E rationnel sur k. Le théorème de Riemann-Roch permet alors de mettre sur $E(k)$ une structure de groupe abélien dont 0_E est élément neutre. Le principal résultat concernant ce groupe est :

Théorème 1.12 (Mordell-Weil) - *Le groupe $E(k)$ est de type fini, donc isomorphe à $\mathbf{Z}^r \times T$ où T est un groupe fini.*

Le calcul du rang r est difficile en pratique, inconnu en théorie ; mais ce rang est souvent au moins 1, donc $E(k)$ est souvent infini. On connait des courbes de rang jusque 14 sur $\mathbf{Q}$, et on pense qu'il en existe de rang arbitrairement grand. Par contre il n'y a qu'un nombre fini de points "entiers".

$\boxed{3}$ Si X est de genre ≥ 2, tout (sauf les preuves !) se simplifie :

Théorème 1.13 (Faltings) = "Conjecture de Mordell" - *Si X est de genre au moins 2, alors $X(k)$ est fini.*

On ne sait malheureusement pas obtenir de borne explicite donnant un algorithme pour trouver tous les points rationnels.
La démonstration utilise de manière essentielle la jacobienne $J(X)$ de X. Signalons à l'occasion l'importance de cet objet associé à toute courbe algébrique X ; c'est une variété projective ayant de plus une loi de groupe définie algébriquement (on l'appelle variété abélienne). Il existe un plongement $X \hookrightarrow J(X)$ qui factorise tout morphisme de X dans une variété abélienne. La loi de groupe permet d'étudier $J(X)$ en grand détail, et certains renseignements sur $J(X)$ peuvent être remontés à X (th. de Torelli).

b) k = corps fini $\mathbf{F}_q$

On part ici d'une courbe projective/$\mathbf{F}_q$. Puisque l'espace projectif tout entier $\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q)$ n'a qu'un nombre fini $(= \frac{1-q^{n+1}}{1-q})$ de points, le problème de finitude ne se pose pas ; on peut par contre essayer de compter les points de $X(\mathbf{F}_q)$. Si $X = \mathbf{P}^1$, on trouve bien sûr $\#X(\mathbf{F}_q) = 1 + q$. Cela reste presque vrai (pour q grand) en général :

Théorème 1.14 (Weil) - *Si X est une courbe sur $\mathbf{F}_q$, de genre g, alors*

$$|\#X(\mathbf{F}_q) - (1+q)| \leq g\,[2\sqrt{q}]\,.$$

(Weil avait donné la borne $[2g\sqrt{q}]$; celle donnée ici est de Serre). Ce résultat provient de "l'hypothèse de Riemann" pour la courbe X : la fonction zêta de la courbe

$$Z_X(T) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbf{F}_{q^n})}{n} T^n \in \mathbf{Z}[\![T]\!]$$

est une fraction rationnelle (d'après Riemann-Roch), et "l'hypothèse de Riemann", démontrée par Weil, dit que ses zéros sont de module $q^{-1/2}$.

§5 Annexe : diverses définitions du genre (X compacte)

I/ Topologie

$\boxed{1}$ En termes de l'homologie (simpliciale ou singulière), le genre g de la surface de Riemann X est donné par la formule

$$g = \frac{1}{2} \dim\ H_1(X, \mathbf{Z}).$$

$\boxed{2}$ La surface X est homéomorphe à un tore à trous (un "bretzel") ; alors le genre g est le nombre de trous.